最近のRecursion Theoryについて (ブール代数値の解析学と超準解析)

数理解析研究所講究録
336巻 1978年 65-86

最近の Recursion Theory について

法政大 工学部　田中尚夫

§0. この研究集会では Recursion Theory および関連する分野から，筆者が興味をもった最近の話題のうち次のものを紹介した。 1. Paris-Harrington，数学的不完全命題， 2. Solovay，急増加 Ramsey 関数について.（これは 1 と密接に関係する話題である.） 3. Kechris，Δ^1_{2n}-degrees の上昇列について． 4. Harrington，McLaughlin の問題の解決.（可算な Arithmetic set で，non-arithmetic singleton を含むようなものが存在する.） 5. Solovay, Green 等の，Measurable cardinals と $\underset{\sim}{\Delta}^1_2$ 決定性について． 6. Martin, $\underset{\sim}{\Pi}^1_2$-ゲームの決定性について.（大きな基数の存在仮定から，$\underset{\sim}{\Pi}^1_2$ ゲームの決定性が導かれること.） 7. Tanaka, E^1_n-sets についての Recursion Theory.

本報告では，このうち 1 のみについて詳述し，他はすべて省略する。

§1. **Paris-Harringtonの数学的不完全命題.** これは昨年(1977年)かなり話題になっていたもので, Gödelの不完全性定理に関係する結果である. PAを第1階のPeano算術とする. GödelはPAの命題Gで, 真であるがPAでは証明不可能なものを創り出したが, Gは論理体系からの諸概念のいわゆるGödel数化によるものであった. 以来長い間, そのような命題で論理体系のコーディングにはよらない数学的なものが探し求められてきた. ところが1977年早々, このような最初の例がJ. B. Parisによって発見され, その方法がRamsey定理の有限形の一寸した変形に適用できることをL. Harringtonが指摘した.

ωを自然数全体の集合とする. $A \subseteq \omega$が*large*であるとは$A \neq \phi$でAのcardinal $|A| \geq \min A$が成り立つこと. (ここで$\min A$はAの最小元を表わす.) Aが*0-large*とはAがlargeであること; Aが*$(n+1)$-large*とは, $|A| \geq 4$であって, どんな$P: [A]^3 \to 2$に対してもAの部分集合Bで, n-largeかつPに対し均質(homogeneous)なもの —— すなわち$P \restriction [B]^3$が定関数となるB —— が存在することである. ここで$[A]^3$はAの3-element sets全体の集合である.

Paris原理 $\forall n \in \omega \ \exists m \in \omega$ (区間$[0, m)$はn-largeである).

Parisの不完全性定理　Paris原理は真であるが，PAでは証明不可能　な命題である．

注意　自然数の有限集合や有限関数は自然数で表現できる．例えば $x \in \{0, 3, 4, 8\}$ は $a = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^9$ とするとき $\exists i < 4\ [x = (a)_i \dot{-} 1]$ と書き表わすことができる．よってParis原理はPAの論理式として表わすことができ，しかも体系のGödel数化などにはよらないものである．

次に $A \subseteq \omega$, $a, b, c \in \omega$ に対し，$A \to (a)^b_c$ とは任意の分割 $P : [A]^b \to c$ に対し Aの部分集合Bで，$|B| \geq a$ かつ　Pに対し均質　なものが存在すること．

有限形Ramsey定理　$\forall a, b, c\ \exists m\ ([0, m) \to (a)^b_c)$.

この定理はPAで証明可能なことが知られている．

$A \underset{*}{\to} (a)^b_c$ とは，$A \to (a)^b_c$ の定義において，$|B| \geq a$ なる条件を "$|B| \geq a$ かつ $|B| \geq \min B$" でおきかえたものである．

Harrington原理　$\forall a, b, c\ \exists m\ ([0, m) \underset{*}{\to} (a)^b_c)$.

Harrington不完全性定理　Harrington原理は真であるがPAでは証明不可能な命題である．

H-原理については次の文献を参照されたい．

Paris-Harrington, A Mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic

(Ed. by J. Barwise), North-Holland (1977), 1133-1142.

ここでは筆者が聞いた R. Solovay の California 工科大学における連続講演から, Paris 原理に関する部分を, 多少補って整理し直したものを述べる. PA の非標準モデルの応用として面白い証明であると思う.

§2. "n-large" sets についての準備事項.

補題 2.1. 5-element-set ($\subset \omega$) は 2-large でない.

補題 2.2. $B \subseteq A \subseteq \omega$, B: n-large $\Rightarrow$ A: n-large.

補題 2.3. A が $(n+1)$-large ならば, A は n-large.

以上 3 つの補題は容易に証明される.

補題 2.4. $n \geq 2$ とする. A が n-large ならば, $|A| \geq n+4$.

証明. $n=2$. A が 2-large なら補題 2.1 により $|A| \geq 6$. Ind. Step. n のとき成り立つとする. A を $(n+1)$-large とし, $a \in A$ を一つとる.

$f(i, j, k) = 1$ if one of i, j, k is a, $= 0$ otherwise なる $f: [A]^3 \to 2$ を考える. f に対し均質な n-large set $B \subseteq A$ がある. Claim $a \notin B$. Ind. hyp. により $|B| \geq n+4$. $\therefore |A| \geq |B|+1 \geq n+5$. Claim の証明:

もし $a \in B$ なら，($n>0$ だから) $|B| \geq 4$. よって a と異なる $i, j, k \in B$ がある. $f(i,j,a)=1$, $f(i,j,k)=0$ であるから $f \restriction [B]^3$ は定関数でない. 不合理. $\dashv$

<u>系 2.5.</u> $n \geq 5$ とする. $A \subseteq [0, n)$ ならば, A は $(n-3)$-large でない.

<u>系 2.6.</u> $l \geq n \geq 4$ とする. $A \subseteq [0, n) \cup \{l\}$ ならば, A は $(n-2)$-large でない.

<u>補題 2.7</u> $n \geq 2$ とする. A が n-large で, $a \in A$ ならば, $A-\{a\}$ は $(n-1)$-large である.

<u>証明</u>. $n=2$ のとき. A を 2-large とし, $a \in A$ を使って 2.4 の証明における f を作ると, f に対し均質な 1-large $B \subseteq A$ がある. $|B| \geq 4$ より $a \notin B$. $\therefore B \subseteq A-\{a\}$. よって補題 2.2 により $A-\{a\}$ は 1-large. Ind. Step. n のとき成り立つとし, A を $(n+1)$-large とする. そこで $A-\{a\}$ が n-large でないと仮定しよう. $f:[A-\{a\}]^3 \to 2$ なる f で, f に対し $(n-1)$-large 均質集合 $\subseteq A-\{a\}$ が存在しないようなものがある. $f^*:[A]^3 \to 2$, $f = f^* \restriction [A-\{a\}]^3$ なる f^* に対し, n-large 均質な $B^* \subseteq A$ がある. 今度は $a \in B^*$ でなければならぬ. Ind. hyp. により $B^*-\{a\}$ は $(n-1)$-large である. 従って $A-\{a\}$ が f に対し均質な $(n-1)$-large set $B^*-\{a\}$ をもつことになり

fの選び方に矛盾する．ゆえに $A-\{a\}$ は n-large でなければならない．

<u>定理 2.8.</u> $n \geq 3$ とする．$[0, m)$ が n-large ならば，$m > n$ であって $[n, m)$ は $(n-2)$-large である．

証明．$[0, m)$ が n-large とする．次のように $f : [0, m-1]^3 \to 2$ を定義する．（系 2.5 により $m > n$．）

$$i < j < n \leq k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 1$$

$$i < n \leq j < k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 0$$

$$i < j < k < n \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = \text{任意}$$

以下 7ページ へ続く．

本節の結果は，定義などの修正によって少し改良できる．しかし後方への影響はない．本節に関し塚田信高，高橋真 両氏から有益な御注意を受けた．

$$n \le i < j < k \quad\Rightarrow\quad f(i,j,k) = 0$$
$$i < j < n \quad\Rightarrow\quad f(i,j,m-1) = 0$$
$$i < n \le j < m-1 \quad\Rightarrow\quad f(i,j,m-1) = 1.$$

この f に対し均質な $(m-1)$-large set $B \subseteq [0,m)$ がある。<u>Claim</u> $|[0,n) \cap B| \le 1$. もし $[0,n) \cap B = \phi$ ならば、$B \subseteq [n,m)$. よって $[n,m)$ は $(m-1)$-large である。$[0,n) \cap B$ が singleton ならば、$\{i_0\} = [0,n) \cap B$ とすると、B は $(m-1)$-large であるから補題2.7によって $B - \{i_0\}$ は $(m-2)$-large，従ってそれを含む $[n,m)$ は $(m-2)$-large である。

Claim の証明：$|[0,n) \cap B| \ge 2$ と仮定すれば、$i_0, i_1 \in [0,n) \cap B$，$i_0 < i_1$ なる i_0, i_1 がある。$[0,n) \cup \{l\}$ $(l \ge n)$ は $(m-1)$-large でないから（補題2.3と系2.6），$B - [0,n)$ は少くとも2元をもつ。よって $n \le j < k$ なる $j, k \in B$ がある。$k < m-1$ の場合：$f(i_0, i_1, j) = 1$，$f(i_0, j, k) = 0$；$k = m-1$ の場合：$f(i_0, i_1, m-1) = 0$，$f(i_0, j, m-1) = 1$. よって $f \restriction [B]^3$ は定関数でない。不合理。$\dashv$

§3. Paris原理が真な命題であること.

補題3.1. $A \subseteq \omega$, $n \in \omega$ とする. Aが無限集合ならば, Aの有限部分集合Bで n-large なるものがある.

証明. nについての induction. $n=0$ のときは自明. nのとき, すべての無限集合Aについて補題が成立するとする. $n+1$ の場合成立しないと仮定すれば: 或無限集合Aがあって, Aは有限$(n+1)$-large 部分集合を含まない. 従って

(1) $\forall D \subset A$ (D finite & $|D| \geq 3$ $\Rightarrow \exists P : [D]^3 \to 2$ s.t. Pに対し均質な有限 n-large set $\subset D$ は存在しない)

である. Claim. $F : [A]^3 \to 2$, 「Fに対しては均質なAの有限 n-large 部分集合がない」ようなFがある. 無限形Ramsey定理によれば, 上のFに対しAの無限部分集合Bで, Fに対し均質なものがある. このBに対し帰納法の仮定を使うと, Bは有限 n-large 部分集合Cをもつ. $F\restriction[B]^3$ は定関数だからもちろん $F\restriction[C]^3$ もそう. よってFに対し均質な有限 n-large 集合 $C \subset A$ が存在することになって, Fの性質に反する.

Claimの証明. Aの要素を並べて $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ とし, $A_k = \{a_i \mid i < k+3\}$ とおく. (1)より,

各 A_k に対し反例 P_k が少くとも一つ存在する．反例は各 k に対し有限個しかない．今

$$P_k \prec P_l \Leftrightarrow k<l \ \& \ P_k = P_l \upharpoonright [A_k]^3$$

と定義すれば，$T=\{P \mid P$ は A_k に対する反例，$k=0,1,2,\cdots\}$ は $\prec$ に関し有限分岐無限 tree をなす．更に $P\in T$ が根でなければ，$P' \prec P$ なる P' が必ずある．よって D. König の補題により，T は少くとも一つの無限枝をもつ．これは自然に一つの $F: [A]^3 \to 2$ を定義し，F は A の有限 n-large 均質部分集合をもたない．$\dashv$

<u>系3.2</u>．$\forall n \in \omega\ \exists C \subset \omega$（$C$ は有限 n-large）．

<u>系3.3</u>．Paris 原理が成り立つ：$\forall n\ \exists m$ s.t. $[0, m)$ は n-large である．

証．C_n を有限 n-large 集合 $\subset \omega$ とする．C_n の最大元を $m-1$ とすると，$[0, m)$ は n-large である．$\dashv$

同様な論法で Harrington 原理が成立することを証明できる．

§4 PAの可算非標準モデルにおけるcut

$\mathfrak{M} = \langle |\mathfrak{M}|, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}} \rangle$ をPAの可算非標準モデルとする．以下 superscript $\mathfrak{M}$ は省略し $\mathfrak{M}$ と $|\mathfrak{M}|$ とを同一視する． $C \subset \mathfrak{M}$ が cut であるとは，1°) $0 \in C$, 2°) $x \in C \Rightarrow x+1 \in C$, 3°) $x \in C$ & $y < x \Rightarrow y \in C$, 4°) $C \neq \mathfrak{M}$, が成り立つこと．例えば $\mathfrak{M}$ の標準自然数全体の集合は cut である．一般に $\mathfrak{M}$ の cuts は沢山ありうる．

例 4.1 $\mathcal{F} = \{ f \mid f : \omega \to \omega,\ f$ is FODO $\langle \omega, +, \cdot, 0, 1 \rangle \}$ とおく． $\mathcal{F}$ は可算集合である． $\mathcal{U}$ をすべての co-finite sets $\subseteq \omega$ を含む ω 上の non-principal ultrafilter とし， $\mathcal{S} = \mathcal{F}/\mathcal{U}$ を作れば この $\mathcal{S}$ は PA の可算非標準モデルである． $\mathcal{S}$ には $2^{\aleph_0}$ 個の cuts が存在する．何故なら，もちろん $\mathcal{S}$ は $<$ の意味で稠密ではないが，次の補題が成り立つからである．

補題 4.2 各正有理数 r に対し， $\mathcal{F}/\mathcal{U}$ の要素の無限下降列を含む区間 I_r を対応させ，

$r < r' \Rightarrow$ 区間 I_r の要素 $<$ 区間 $I_{r'}$ の要素

が成り立つようにできる．

さて $\mathfrak{M}$ を可算非標準モデル（PAの）とし，C を $\mathfrak{M}$ の cut とする．$B \subseteq C$ が C のクラスであるとは，$\mathfrak{M}$ の意味で有限な集合 $b (\subset \mathfrak{M})$ が存在して $B = b \cap C$ となることである．（簡単に"$\mathfrak{M}$-有限"と呼ぶ）

$R \subset C \times C$ が C の2-項関係とは，$R = \pi^{-1}(b) \cap C \times C$ なる $\mathfrak{M}$-有限集合 b が存在すること，ただし π は pairing function である．多項関係も同様に定義される．

例 4.3. $x \in C$ に対し $A = \{z \in C \mid x \le z\}$ とおくと，A は C のクラスである．

証明．（本橋信義氏による．）$Fin(y) \Leftrightarrow \forall s \forall t [s < t < lh(y) \Rightarrow (y)_s < (y)_t]$．$Fin(y)$ の下で $z \varepsilon y \Leftrightarrow \exists s < lh(y) (z = (y)_s)$ とする．

$$PA \vdash \forall u \forall x [x < u \to \exists y \{Fin(y) \wedge \forall z (z \varepsilon y \leftrightarrow x \le z < u)\}]$$

は明らか．よってこの sentence は $\mathfrak{M}$ で真．今 $u \in \mathfrak{M} - C$, $x \in C$ なる u, x をとると，$x < u$ であるから，$\forall z (z \varepsilon a \leftrightarrow x \le z < u)$ なる $\mathfrak{M}$-有限 set a が存在する．そうして $A = a \cap C$．$\dashv$

cut C が正則とは，C の任意のクラス B と任意の $x \in C$ に対し，

B : cofinal in C $\Rightarrow$ B は x^{th} element をもつ．

<u>補題4.4</u>　Cが正則cutなら，Cは$+$，$\cdot$，expの下で閉じている．

証明．1°)　$x\in C \Rightarrow x+x\in C$．証：$x\in C$に対し$A=\{z\in C \mid x\leq z\}$を作ると例4.3により$A$は$C$のcofinalクラスである．$x+1\in C$だから$A$は$x+1$番要素をもつ．それは丁度$x+x$である．$\therefore x+x\in A\subseteq C$．□

2°)　$x,y\in C \Rightarrow x+y\in C$．証：$x<y$としてよい．$x+y<y+y\in C$ (by 1°))．$\therefore x+y\in C$．□

3°)　$x,y\in C \Rightarrow x\cdot y\in C$．証：$x\in C, x\neq 0$とする．$A=\{x\cdot y\in C \mid y\in C\}$を作れば例4.3の方法で$A$が$C$のクラスであることがわかる．$A$はcofinal in Cである．[☺ もし$A<v$なる$v\in C$があれば，$x\cdot y\leq v$なる最大の$x\cdot y$をとる．最大性から$x\cdot(y+1)>v$．$v\in C$だから$x\cdot y\in C$．$\therefore x\cdot(y+1)=x\cdot y+x\in C$．$\therefore x\cdot(y+1)\in A$．これは$A<v$と矛盾する．]任意の$y\in C$に対し$y+1\in C$だから$A$は$(y+1)$番要素をもつ．それは$x\cdot y$に他ならない．□

4°)　$x,y\in C \Rightarrow x^y\in C$．$(x\neq 0)$　証．$x\neq 0,1$なる$x\in C$を固定する．$A=\{x^y\in C \mid y\in C\}$として3°)と同様に論ぜよ．□　$\dashv$

cut が PA のモデルになる条件を調べる．

<u>補題 4.5.</u> cut C が $+, \cdot$ の下で閉じていて，C のすべての関係達の集合が $\exists x \in C$ の下で閉じていれば，C は PA のモデルである．

証明．$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を PA の論理式とし

$$B = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C^n \mid C \models \varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$$

とすれば，B は C の関係である．—— 何となれば：$\varphi(\mathbf{x}) = \exists y \psi(x, y)$ の場合．Ind. hyp. により $D(\psi) = \{(x, y) \in C^2 \mid C \models \psi(x, y)\}$ は C の関係である．C の関係達は $\exists y \in C$ の下で閉じているから $D(\varphi) = \{x \in C \mid C \models \exists y \psi(x, y)\} = \{x \in C \mid \exists y \in C((x, y) \in D(\psi))\}$ は C の関係（クラス）である．$\varphi = \neg \psi$ のとき．$D(\varphi) = \{x \in C \mid C \models \neg \psi(x)\} = C - D(\psi)$．$D(\psi) = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b があるから，これを用いて $D(\varphi) = d \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 d を作ることができる．

さて $C \models$ "数学的帰納法" とは $B = \{x \in C \mid C \models \varphi(x)\} \neq 0$ なる B が最小元をもつことである．上でみたように B は C のクラスであるから，

"C の空でないクラス B は必ず最小元をもつ"

ことが言えればよい．$B = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b をとる．b の最小元を x_0 とすると，$x_0 \in C$ [$\because$ もし

$x_0 \notin C$ なら $\forall x > x_0 (x \notin C)$ であるから，$b \cap C = \phi$ となって $B \neq \phi$ に反す.] 従って $x_0 \in B$. 明白に x_0 は B の最小元である.

数学的帰納法以外の PA の公理が C で成り立つことは，仮定によって明白である. $\dashv$

cut C が <u>弱コンパクト</u> とは，C が正則で，かつ

$$(1)\ \begin{cases} \forall F : [C]^3 \to 2,\ F \text{ は } C \text{ の関係} \Rightarrow \exists S \subseteq C : \\ S \text{ は cofinal クラス of } C \text{ で，} F \text{ に対し均質である.} \end{cases}$$

が成り立つこと.

<u>補題4.6.</u> 弱コンパクト cut は PA のモデルである.

証明. C は正則であるから，補題4.4によってそれは $+, \cdot$ の下で閉じている. よって補題4.5から，C の関係達が $\exists x \in C$ の下で閉じていることが言えれば十分.

$R(x, y)$ を C の関係とする. $x < y < z$ に対し

$$F(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow \forall u < x \left[(\exists v < y) R(v, u) \Leftrightarrow (\exists v < z) R(v, u) \right]$$

なる $F : [C]^3 \to 2$ を作る.

<u>Claim</u> (i) F は C の関係である. 証: R に対し n-有限集合 r が存在して $R = r \cap C^2$. この r を用いて n-有限な f を求め $F = f \upharpoonright [C]^3$ が成り立つように

できる. □

さて C が弱コンパクトなることから, この F に対し C の cofinal クラス S で, 均質なものがある.

<u>Claim</u> (ii) $F \restriction [S]^3 \equiv 1$. 証. S は F に対し均質だから, $x<y<z$, $F(x,y,z)=1$ なる1組の $\{x,y,z\} \in [S]^3$ が求まればよい. $x=\min S$ とおく. $x \in C$ なるゆえ $2^x+2 \in C$. よって S は 2^x+2 番要素をもつ:

$$S=\{s_0=x,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{2^x+1},\ s_{2^x+2},\ \cdots\}$$

そこで, $T_i=\{u<x \mid (\exists v<s_i)R(v,u)\}$ とおくと, $|\mathcal{P}(\{u \mid u<x\})|=2^x$ であるから, Pigeonhole Principle によって

$$\exists i,j:\ 1 \leq i<j \leq 2^x+1,\ T_i=T_j.$$

よって F の定義から $F(s_0,s_i,s_j)=1$. □

目的の "$(\exists v \in C)R(v,u)$ が C のクラスである" を示すために,

$W=\{x \in C \mid y$ が S の $>x$ なる最小元で, z が S の $>y$ なる最小元ならば, $(\exists v<z)R(v,x)\}$

なる W を考える. R はクラスであるから例4.3のような方法によって W がクラスであることがわかる.

<u>Claim</u> (iii). $W=\{x \in C \mid (\exists v \in C)R(v,x)\}$. 証: $\subseteq$ は明白. よって $(\exists v \in C)R(v,x)$ とせよ. y を x

より大きい最小のSの元，zはyより大きい最小のSの元とする．Sは有界でないから

$$z' > z \quad \& \quad (\exists v < z') R(v, x)$$

なる$z' \in S$がある．よってClaim(ii)により
$F(y, z, z') = 1$．従って

$$\forall u < y \, [(\exists v < z) R(v, u) \leftrightarrow (\exists v < z') R(v, u)]$$

である．特に$x < y$だから

$$(\exists v < z) R(v, x) \leftrightarrow (\exists v < z') R(v, x).$$

右辺は真，よって$(\exists v < z) R(v, x)$，$\therefore x \in W$．□

WはCのクラスだからClaim(iii)から$\{x \in C \mid (\exists v \in C) R(v, x)\}$は$C$のクラスである．⊣

§5. 主定理の証明

先づ，証明のKeyになる定理を述べる．

定理5.1．$\mathfrak{M}$がPAの可算非標準モデルで，x, y, zが$\mathfrak{M}$の非標準数，$x < y$かつ区間$[x, y)$がz-largeであるとする．このとき

$$x \in C, \quad y \notin C, \quad C \text{ は弱コンパクト}$$

なるcut Cが存在する．従って$C \models PA$．

証明　Real worldで考える．$\{f_i \mid i \in \omega\}$は$f : [y]^3 \to 2$なるすべての写像$f$達を$\mathfrak{M}$の要素達

でコードしたものの enumeration とする。ただし各 f がリストに無限回現われるようにしておく。

$\mathfrak{N}$-有限集合達の無限列

$$\langle S_i \mid i \in \omega \rangle, \quad S_{i+1} \subseteq S_i$$

で、各 S_i が $(z-i)$-large となるものを定義する。z は非標準数であるから、すべての標準数 i に対し $z-i \in \mathfrak{N}$ である。

先づ $S_0 = [x, y)$ とする。仮定により S_0 は $(z-0)$-large であり、明白に $\mathfrak{N}$-有限である。Ind. hyp.: S_i は f_{i-1} に対し均質な $\mathfrak{N}$-有限 $(z-i)$-large set $\subseteq S_{i-1}$ とする。仮定により $f_i \upharpoonright [S_i]^3$ に対し $\underbrace{}_{\text{均質な}}$ $(z-i-1)$-large set $S_{i+1} \subseteq S_i$ がある。

個々の step は $\mathfrak{N}$ 内で行うから S_{i+1} は $\mathfrak{N}$-有限集合として得られる。

$a_n = \min S_n$ とすると、$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.

<u>Claim</u>(i) $\forall i \in \omega\, \exists j \in \omega\, [\, j > i \;\&\; a_j > a_i \,]$.

証: 与えられた i に対し

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 1 & \text{if one of } y_1, y_2, y_3 \text{ is } a_i \\ 0 & \text{ow}, \end{cases}$$

なる $f : [y]^3 \to 2$ を作る。$f = f_j$, $j > i$ なる j がある。S_{j+1} は f_j に対し均質だから $f \upharpoonright [S_{j+1}]^3$ は

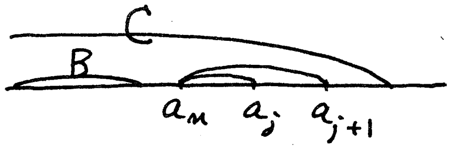
定関数. よって§2の論法で $a_i \notin S_{j+1}$. 従って
$a_i < \min S_{j+1} = a_{j+1}$. □

そこで $C = \{x \in \mathfrak{N} \mid \exists i \in \omega\,(x < a_i)\}$ と定義する. $C \subseteq [0, y)$ であるから, C は cut である.

<u>Claim</u> (ii) C は正則である. 証: B を C の任意のクラスとする. B が有界であるか又は B が "C" 個の元を含むことを示せばよい. $B = b \cap C$ なる $\mathfrak{N}$-有限集合 b がある. $f : [y]^3 \to 2$ を $y_0 < y_1$ に対し

$$f(y_0, y_1, y_2) = 0 \text{ if } b \cap [y_0, y_1) = \phi, \ = 1 \text{ ow.},$$

によって定義する. 或 S_n が f に対し均質である.
Case 1°) $f = 0$ on $[S_n]^3$. このとき $a_n \le t < a_j$ なるすべての区間 $[a_n, a_j]$ が B の元を含まない. よって



B は C で有界である. Case 2°) $f = 1$ on $[S_n]^3$. このとき, 各 j に対し B が少くとも a_j 個の元を含むことを示す. m を十分大きくとって $m > n$, $a_m > a_j + 1$, S_m : f に対し均質 となるようにする. S_m は $(z-m)$-large だからもちろん 0-large. よって S_m は少くとも $a_m (= \min S_m)$ 個の元を含む. よって S_m は

$$S_m = \{w_0, w_1, w_2, \cdots, w_{a_j+1}, \cdots, w_{a_m}, \cdots\}$$

のように並べることができる. 今 $w_{a_j+1} \in C$ なる

ことが証明されたとしよう. そのとき w_{a_j+1} より小さい元はすべて C に属す. もちろん $f=1$ on $[S_m]^3$ であるから $k+1 < a_j+1$ なるすべての k に対し $[w_k, w_{k+1})$ は B の元を少くとも一つ含む. 従って B は少くとも a_j 個の元を含む.

以下, $w_{a_j+1} \in C$ の証: $h : [y]^3 \to 2$ を $y_1 < y_2 < y_3$ に対し $h(y_1, y_2, y_3) = 1 \Leftrightarrow y_1 > w_{a_j+1}$ によって定義する. p を十分大きくとって $p > m$, $a_p > a_m$, S_p : h に対し均質, となるようにする. これに対し

$$h = 1 \text{ on } [S_p]^3.$$

何故なら, S_p は 0-large だから少くとも a_p 個の元をもつ. S_p の元を並べると

$$S_p = \{u_0, u_1, \cdots, u_{a_j+1}, \cdots, u_{a_m}, \cdots, u_{a_p}, \cdots\}.$$

となる. $u_0 = a_p > a_m = w_0$, $S_p \subseteq S_m$,

$$S_m = \{w_0, w_1, \cdots, w_{a_j+1}, \cdots\}$$

であるから, $w_{a_j+1} < u_{a_j+1}$. よって $h(u_{a_j+1}, u_{a_m}, u_{a_p}) = 1$. $\therefore h = 1$ on $[S_p]^3$.

これによって S_p の元はすべて w_{a_j+1} より大きいことがわかる. 特に $a_p > w_{a_j+1}$ である. $a_p \in C$ なるゆえ, $w_{a_j+1} \in C$. これで Claim (ii) が証明された. □

定理 5. 1 を証明するために, C が弱コンパクトで

あることを示さねばならぬ. 既に C が正則であることは証明したから,

$\forall F : [C]^3 \to 2$, F は C の関係 $\Rightarrow$ $\exists S$: S は C の cofinal クラスで, F に対し均質である,

を示せばよい。そこでかかる F をとれ. $f : [Y]^3 \to 2$, $F = f \upharpoonright [C]^3$ なる f を作る. F は C の関係だから, $\mathcal{M}$-有限な f がとれる. よって f に対し均質な S_k が存在する. S_k は $\mathcal{M}$-有限であるから $S \underset{def}{=} S_k \cap C$ は C のクラスであり, 十分大きいすべての j に対し $a_j \in S$ である. よって S は cofinal in C. 明らかに S は F に対し均質である.

以上により定理5.1が証明された. $\dashv$

さて系3.3により

$$\gamma(n) = \min\{m \mid [0, m) \text{ は } n\text{-large}\}$$

なる関数 $\gamma : \omega \to \omega$ が定まる. "$[0, m)$ は n-large である" は n, m の recursive relation であるから, γ は一般帰納的関数である.

補題5.2 $f : \omega \to \omega$ を任意の provably recursive function とする. そのとき或所から先すべての n に対し

$$\gamma(n) \geqq f(n)$$

が成り立つ.

証明. $f=\{e\}$ (e は f に対する Gödel 数) とする. 仮定により

$$PA \vdash \forall x \exists y T(\underline{e}, x, y),$$

ここに $\underline{e}$ は e に対する numeral で, T は Kleene の T-predicate である.

$$S(x, z) \Leftrightarrow \exists y [T(\underline{e}, x, y) \wedge z = U(y)]$$

とおく. ここに $U(y)$ は Kleene の U-function である. $S(x, z)$ は Σ_1^0-formula である. 今仮りに無限に多くの n に対し $\gamma(n) < f(n)$ であったとしよう.

PA の公理達, $c > \underline{n}$ $(n \in \omega)$, $\gamma(c) < f(c)$ なる sentences の集合は有限充足可能である. ゆえに Compactness Theorem によって, これらすべての sentences に対する可算モデル $\mathfrak{M}$ がある. 明らかに $\mathfrak{M}$ は非標準モデルである. c を解釈する $\mathfrak{M}$ の元を同じ c で表わそう.

$[0, \gamma(c)]$ は c-large であった. 定理2.8 により $[c, \gamma(c))$ は $(c-2)$-large である. c, $\gamma(c)$, $c-2$ は非標準数であるから定理5.1 を適用して,

$$c = x \in C, \quad y = \gamma(c) \notin C$$

なる弱コンパクト cut C がある。 $\gamma(c) < f(c)$ より

(1) $$f(c) \notin C.$$

ところで $PA \vdash \forall t\, \exists! z\, S(t,z)$ であり, $C \models PA$ であるから, ある $c \in C$ に対し $C \models S(c,w)$ なる <u>unique</u> $w \in C$ がある. S は Σ^0_1-formula なるゆえ $\mathfrak{M} \models S(c,w)$. 一方 $S(*,*)$ の定義から $\mathfrak{M} \models S(c,f(c))$. ゆえに $w = f(c)$ でなければならない. $\therefore$ $f(c) \in C$. これは (1) と矛盾する. 従って γ は f を殆んど dominate する. $\dashv$

<u>Paris原理は PA で証明可能でない.</u>

証明. もし $PA \vdash$ Paris'原理 とせよ. 即ち

$$PA \vdash \forall n\, \exists m\, ([0,m] \text{ は } n\text{-large}).$$

よって $PA \vdash$ "γ is total" ということになり, γ が provably recursive となってしまう. これは補題 5.2 に反す. 従って

$$PA \nvdash \text{Paris原理}. \quad \dashv$$

γ は general recursive であるが, provably recursive ではない具体例を与える. 今まで知られていたかかる関数は対角線論によって作られたもののみである.

以上.